УДК 681.51

Н.А. САЙФУТДИНОВА

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В МОДЕЛИ ЭНДОГЕННОГО РОСТА ЗАМКНУТЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В статье рассматривается математическая модель управления распределением инвестиций, в которой научно-технический прогресс учитывается в форме увеличения коэффициента эластичности по фактору капитал. Предложен алгоритм решения соответствующей задачи управления, при котором средства выделяются из объёма, выделявшегося ранее на инвестирование в производство. В результате в конечный момент времени удаётся достичь увеличения объёма выпуска по сравнению с объёмом, полученным по итогам рассматриваемого периода, а также получить максимальное накопление капитала.
Ключевые слова: *оптимальное управление, критерий максимальности.*

Введение. В работах Р.Солоу показано, что для неоклассических производственных функций экономический рост в долгосрочном плане ограничен темпами прироста трудовых ресурсов [1]. Поэтому, вскоре, внимание экономистов, занимающихся данной проблематикой, было переключено на научно-технический прогресс (НТП) как основной источник экономического роста. Представители нового направления неоклассицизма сводили НТП к экзогенному феномену. В 50-е годы 20-го столетия появились модели учёта НТП в виде введения в производственную функцию некоторого параметра $A(t)$. В зависимости от места привязки коэффициента A стали различать «нейтральный», по Хиксу, Харроду и Солоу, НТП [2]. Но при такой трактовке вопроса оставались в стороне проблемы мотивации инновационного процесса, формирования параметра A, и сам этот параметр являлся возрастающей функцией времени. Желание разрешить поставленные проблемы привело к отказу от концепции экзогенного НТП.

Теория эндогенного экономического роста появилась в конце 80-х гг. 20-го века. Переходными моделями можно назвать модели Эрроу [3] и Шешински [4], в которых НТП учитывался в процессе обучения при использовании основных фондов или же с помощью некоторого фактора A, определяемого уровнем знаний. В моделях Лукаса [5], Ромера [6,7], Агитона-Ховитта [8] влияние инноваций на технологические сдвиги моделировалось с учётом накопления человеческого капитала с помощью блока промежуточных товаров, влияющего на качество конечного продукта, себестоимость производства, эффективность основного капитала. Этот же подход развивается в работах Узавы [9], Беккера [10] и других представителей этого направления. Более подробный обзор этих моделей содержится, например, в [11].

Несмотря на разнообразие и многочисленность предложенных подходов, исследование внутренних механизмов влияния научно-технического

прогресса на эндогенный экономический рост всё ещё остаётся одной из главных нерешённых проблем в моделировании экономических систем. Другими словами, до сих пор не раскрыта суть той движущей силы, той «пружины», которая, подобно пружине часового механизма, является первопричиной постоянного экономического роста и социального прогресса. В работе авторов [12] показывается, что рост эластичности производственной функции по фактору капитал в рамках неоклассической модели роста Солоу может приводить к существенному росту накоплений. Отталкиваясь от предложенного в [12] подхода, в данной работе предлагается модель оптимального управления, в которой можно добиться увеличения выпуска и накопления капитала, выбирая некоторую последовательность управлений, направленных на получение эффективных технологий. Формулируется некоторая задача оптимизации, решение которой позволяет установить оптимальный уровень инвестиций, необходимый для достижения максимального темпа экономического роста. Данная модель тестируется на примере советской экономики за период 1961-1985 гг. Показано, что увеличение инвестиций в научно-исследовательский сектор (НИС) могло бы привести к увеличению темпов роста на 10-15 %.

Постановка задачи. Из результатов, изложенных в [12], следует, что при $\alpha_K \to 1,\ t \to \infty$ функция накопления капитала *K(t)*, удовлетворяющая уравнению Рамсея – Солоу, теоретически может расти неограниченно (при этом соответствующая производственная функция удовлетворяет всем условиям неоклассической функции). Легко показать, что вообще с любым ростом α_K накопление *K(t)* возрастает. Поэтому одна из возможных трактовок эндогенного экономического роста может быть связана с тем, что научно-технический прогресс приводит к росту α_K, т.е. росту эластичности по фактору капитал, другими словами, приводит к повышению эффективности отдачи в использовании основных фондов. Тогда ясно, что инвестиции в исследования и новые разработки в научно-исследовательский сектор будут приводить к росту α_K и, как следствие, к росту *K(t)*. Это и есть один из важнейших механизмов эндогенного экономического роста. В такой постановке возникает естественная задача оптимального управления параметром α_K.

Будем считать, что для абстрактного производственного цикла можно получить некоторую функцию, аппроксимирующую значения коэффициента эластичности по фактору капитал α_K от расходов на науку $s_н$, т.е. от объёма инвестиций $s_н F$, где F – объём выпуска в предшествующий момент времени. Тогда можно считать, что у нас есть некоторая возрастающая функция $\alpha_K = \alpha_K(s_н F)$. Таким образом можно получить для каждого управления $s_н$ некоторую качественную оценку изменения коэффициента эластичности по фактору капитал α_K и рассмотреть производственный цикл того же продукта, но уже с другими технологическими условиями.

Заметим, что в рассматриваемой модели оптимального управления фактор труда $L(t)$ считается некоторой заранее известной функцией, изменение которой в большой замкнутой системе определяется в основном демографическим фактором.

Пусть при $t<t_0$ имеем некоторый первоначальный производственный процесс. В результате накопления на этом этапе фактор капитал достиг значения K_0. Пусть при этом объём трудовых ресурсов равен L_0. Тогда на следующем временном интервале $[t_0;t_1]$ система развивается согласно уравнению Солоу [1], в котором для определенности принимается производственная функция Кобба-Дугласа. Пусть при этом s – доля выпуска, инвестируемая в старые основные фонды (будем считать ее константой). С целью повышения эффективности и достижения более оптимального управления будем считать, что величина $s_н = s_0,\ 0< s_0 <s$ обозначает инвестиции в научно-исследовательский сектор и изымается из средств, ранее инвестировавшихся в старые основные фонды. Тогда согласно модели Солоу имеем нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее динамику капитала с течением времени,

$$\frac{dK}{dt} = (s - s_0)\, A K^{\alpha_0} L^{1-\alpha_0} - \mu\, K(t), \quad L = L_0, \qquad (1)$$

которое мы рассматриваем на временном отрезке $t_0<t<t_1$. Здесь $A>0$ – некоторый известный числовой коэффициент; μ - коэффициент амортизации; $0<\alpha_0<1$ – коэффициент эластичности по фактору капитал.

Если данный отрезок времени мал по сравнению со всем периодом цикла производственного развития, то все функции, входящие в правую часть уравнения Солоу (1) на данном временном интервале, можно считать постоянными. Можно доказать, что при этом погрешность в определении приращения капитала является малой второго порядка. При таких условиях можно считать функцию $L(t)$ имеющей некоторое постоянное значение L_0.

Уравнение (1) с начальным условием

$$K(t_0) = K_0 \qquad (2)$$

представляет собой классическую задачу Коши, решение которой имеет следующий вид:

$$K(t) = \left[\frac{(s - s_0)AL_0^{1-\alpha}}{\mu}\left(1 - e^{\mu(1-\alpha)(t_0-t)}\right) + K_0^{1-\alpha}\, e^{\mu(1-\alpha)(t_0-t)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \alpha = \alpha_0. \qquad (3)$$

Из этого явного вида легко извлекается новое значение капитала K_1 в момент времени t_1. Соответственно, легко вычисляется новое значение выпуска F в момент времени t_1, т.е.

$$K(t_1) = K_1, \quad F_1 = AK_1^{\alpha_0} L_1^{1-\alpha_0}. \qquad (4)$$

Зададим новое значение $s_н = s_1,\ 0< s_1 <1$ для промежутка $[t_1;t_2]$. Из функции $\alpha_K = \alpha_K(s_1, F_1)$ находим новое значение α_1. Тогда производственный процесс для промежутка $t_1<t<t_2$ может быть описан аналогично уравнению (1):

$$\frac{dK}{dt} = (s - s_1) A K^{\alpha_1} L_1^{1-\alpha_1} - \mu K(t) \qquad (5)$$

с новым начальным условием

$$K(t_1) = K_1 \ . \qquad (6)$$

Решая новую задачу Коши (5) и (6), получаем новое значение капитала K_2 в момент времени t_2, что приводит к новому значению выпуска: $F_2 = A K_2^{\alpha_1} L_2^{1-\alpha_1}$, где L_2 – объём трудовых ресурсов в момент времени t_2.

Продолжая процесс и задавая новое значение s_2, получаем новое значение α_2 и можем решать уравнение, аналогичное (5), для $t_2<t<t_3$. Таким образом, получим новые значения K_3 и F_3 - соответственно объёмы основных фондов и выпуска в момент времени t_3.

В общем виде приходим к следующему алгоритму вычисления значений капитала и объёма выпуска в последующий момент времени t_{i+1} в зависимости от известных значений тех же величин в момент времени t_i. Пусть в момент времени t_i известны величины:

$$K(t_i) = K_i \ ; \ L(t_i) = L_i ; \ F(t_i) = F_i \ . \qquad (7)$$

Фиксируем значение величины $s_н=s_i$, т.е. долю выпуска, инвестируемую в научно-исследовательский сектор, причём $0<s_i<s$. Таким образом, получаем величину s_iF_i – некоторый объём инвестиций на науку, который позволяет увеличить эффективность капитала, т.е. повысить коэффициент эластичности по фактору капитал до значения $\alpha_i = \alpha_K (s_i F_i)$. Тогда для $t_i<t<t_{i+1}$ получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dK}{dt} = (s - s_i) A K^{\alpha_i} L_i^{1-\alpha_i} - \mu K(t) \ . \qquad (8)$$

Решая задачу Коши, состоящую из уравнения (8) и начального условия (7), получаем $K_{i+1}=K(t_{i+1})$ и соответственно можем вычислить

$$F_{i+1} = A K_{i+1}^{\alpha_i} L_{i+1}^{1-\alpha_i} \ ,$$

где L_{i+1} – объём трудовых ресурсов при $t=t_{i+1}$.

Очевидно, что при фиксированных значениях правых частей (7) решение (8) зависит только от величины s_i. Таким образом, можно, меняя значение s_i и решая задачу (7), (8), получать различные значения капитала (или выпуска) в момент времени t_{i+1}.

Отметим, что величина значений K_i, F_i напрямую зависит от выбора величины s_i на соответствующем временном промежутке $[t_i, t_{i+1}]$. Естественно, что значения итоговых величин K_n, F_n зависят от всего набора значений s_i, $i=0,...,n-1$. Тогда можно поставить следующую задачу: как выбрать оптимальное управление распределением инвестиций в НИС, т.е. последовательность $(s_i)_{i=0}^{n-1}$ так, чтобы получить максимальный экономический эффект, т.е. максимальную величину K_n.

Сформулируем оптимизационную задачу более конкретно:

$$K(t_i) = K_i, L(t_i) = L_i, F(t_i) = F_i$$

$$\alpha_i = \alpha_K(s_i F_i)$$

$$\frac{dK}{dt} = (s - s_i) A K^{\alpha_i} L^{1-\alpha_i} - \mu K(t), \; i = 0, \ldots, n-1 \qquad (9)$$

$$\max_{(s_i)_{i=0}^{n-1}} K_n - ?$$

Здесь $K_0, F_0, L_0, \ldots, L_n$ – статистические данные, K_i для $i>0$ – решение (i-1)-й задачи Коши, F_i вычисляется по формуле $F_i = A K_i^{\alpha_{i-1}} L_i^{1-\alpha_{i-1}}$ для $i>0$.

Методы решения оптимизационной задачи. Полученную оптимизационную задачу можно решать численно различными способами, например, методом покоординатного спуска или методом градиентного спуска. В результате решения получаем некоторую последовательность $(s_i)_{i=0}^{n-1}$, т.е. получаем план оптимального управления научными исследованиями и разработками на период времени $[t_0, t_n]$. При этом критерием выбора элементов этой последовательности является максимальность величины основных фондов в момент времени t_n. Нужно отметить, что в качестве t_i можно рассмотреть годы, кварталы, месяцы в зависимости от объекта исследования и наличия необходимых статистических данных.

Протестируем построенную модель на примере статистических данных для СССР за 1961-1985 гг. Пусть известны: K_i, $i=0,\ldots,n-1$ – основные фонды за каждый год (в млрд. руб.); L_i, $i=0,\ldots,n-1$ – объем трудовых ресурсов (пересчитанный через среднюю зарплату в млрд. руб.); F_i, $i=0,\ldots,n-1$ – валовой общественный продукт (в млрд. руб.); V_i, $i=0,\ldots,n-1$ – расходы на науку из госбюджета и других источников (в млрд. руб.), n=25. Эти данные приведены в табл.1.

Таблица 1

Основные макроэкономические показатели советской экономики

Годы	Валовой продукт F (в млрд.руб.)	Основные фонды K (в млрд. руб.)	Трудовые ресурсы L (в млрд. руб.)	Коэффициент эластичности по фактору капитал α	Расходы на науку V (в млрд. руб.)
1	2	3	4	5	6
1961	324	441,8	65,87	0,3	4,9
1962	343	477,1	70,76	0,323077	5,4
1963	356	515,3	75,60	0,342857	6,1
1964	388	556,5	81,35	0,36	6,6
1965	420	601	89,05	0,375	7,6
1966	451	648,9	96,91	0,388235	8,3
1967	502	700	105,07	0,4	9

Окончание табл.1

1	2	3	4	5	6
1968	559	754,6	114,08	0,410526	9,7
1969	622,2	813,5	123,72	0,42	10,4

1970	643,5	860	132,05	0,428571	11,7
1971	685,3	914,2	140,61	0,436364	13,3
1972	717,4	971,8	149,30	0,443478	14,7
1973	769,8	1082	158,26	0,45	16,4
1974	816,6	1150,2	167,66	0,456	17,46
1975	862,6	1256	178,81	0,461538	17,5
1976	903,9	1345	193,06	0,466667	17,7
1977	949,6	1437	198,16	0,471429	18,7
1978	995,7	1537	208,38	0,475862	19,8
1979	1028,1	1638	216,73	0,48	20,8
1980	1078,5	1742	228,02	0,483871	22,3
1981	1099,2	1851	235,98	0,4875	23,4
1982	1136,6	1968	245,10	0,490909	24,9
1983	1293,9	2092	253,56	0,494118	26
1984	1338,8	2233,8	261,73	0,497143	27,3
1985	1383,6	2333	268,73	0,5	28,6

Считаем, что коэффициент эластичности α меняется за указанный период с 0,3 до 0,5. Поэтому можно составить функцию, аппроксимирующую зависимость коэффициента эластичности по фактору капитал от объёма инвестиций в научно-исследовательский сектор,

$$\alpha_i = \frac{0,6 + V_i \quad 0,615}{V_i + 6,95}. \tag{10}$$

Полученную функцию (10) будем использовать для оценки значений α при новых (изменённых) значениях $V_i=s_iF$.

Из анализа статистических данных за указанный временной промежуток получаем, что доля выпуска, инвестируемого в старые основные фонды, равна s=0,165. При этом величина инвестиций в научно-исследовательский сектор не превышала 1,5% от валового продукта, т.е. s_0=0,015. Поставим следующую задачу управления: какую часть s нужно было инвестировать ежегодно в научно-исследовательский сектор для того, чтобы добиться наилучшего экономического эффекта?

Имеем: K_0=441 млрд. руб.; F_0=324 млрд. руб.; L_0=65,97 млрд. руб. Тогда при i=0 можно выбрать величину s_0, $s_0 : 0,015 < s_0 < 0,165$. Далее вычисляем $V_0 = s_0 \; F_0$, α_0 находим по формуле (10) при i=0. В итоге получаем следующую задачу Коши:

$$\frac{dK}{dt} = (s - s_0) \; A \; K^{\alpha_0} \; L^{1-\alpha_0} - \mu \; K$$
$$K(t=0) = K_0,\ L(t=0) = L_0,\ F(t=0) = F_0, \tag{11}$$

где μ=0,05.

Решая дифференциальное уравнение (11) описанным выше способом, получаем некоторое значение K_1 . Для новых значений K_1 и α_0 можно вычислить новое значение $F_1 = A \; K_1^{\alpha_0} \; L_1^{1-\alpha_0}$, т.е. мы получили новые значения основных фондов и валового продукта для второго года из рассматриваемого временного промежутка, иначе говоря, при i=1. Теперь обозна-

чим $F_0=F_1$, $K_0=K_1$, $L_0=L_1$, и, выбирая следующее s_i, i=1, считаем α_1 по (10) и решаем новую задачу (5), (6). Проводим аналогичные рассуждения для i=2,…,n-1. В нашем случае n=25. Таким образом, мы можем составить последовательность $\left(s_i\right)_{i=0}^{n-1}$ и для каждой такой последовательности получаем свои значения K_n, F_n.

Отметим, что на основе имеющихся статистических данных для указанного временного промежутка удалось подобрать функцию, аппроксимирующую величину L в зависимости от времени. Эта функция не является константой и имеет следующий вид:

$$L\left(t\right) = 61 + 5t + 0{,}18t^2 - 0{,}0015t^3. \qquad (12)$$

Используем соотношение (12) для подсчёта L_i, $i=0,\dots,n-1$.

Отметим, что для лучшей аппроксимации статистических данных величину A также следует считать переменной. Нам удалось подобрать для нее следующее аппроксимирующее выражение:

$$A = 2{,}99 - 0{,}0363t,$$

где $t=0,\dots,n-1$. Легко показать, что рассуждения, сделанные выше, будут верны и в этом случае.

При сделанных выше пояснениях задача (9) оптимального управления была решена двумя разными методами: методом покоординатного спуска (МКС) и методом градиентного спуска (МГС). Из двух указанных методов более эффективным оказался МГС. Следует заметить, что, поскольку целевой функционал не удается выразить в явном виде, для реализации МГС значения градиента в текущей точке находили численно по формуле конечных разностей.

Для дополнительного тестирования эффективности предложенных алгоритмов был применен один из вариантов глобального случайного поиска [13] при решении сформулированной выше оптимизационной задачи. Основанием для этого послужило то, что описанные выше два метода носят локальный характер и в оптимизационных задачах со сложным поведением целевой функции могут приводить к нахождению лишь локальных максимумов, которые часто не совпадают с глобальным. Алгоритм, описанный в [13], представляет собой пошаговый итерационный процесс. На каждом шаге при нахождении максимума многомерной целевой функции $F(x)$, которая для простоты считается положительной, происходит вычисление ее значений в M случайных точках: $F_m = F(x_m), m = 1,\dots,M$. Далее подсчитываются вероятности

$$p_m = \frac{F_m}{\sum_{i=1}^{M} F_i}, m = 1,\dots,M.$$

На следующем шаге итерации число новых случайных точек в окрестности «хороших» пробных точек предыдущих итераций выбирается пропорционально этим вероятностям. Таким образом, пробные точки следующих шагов выбираются в окрестности самых лучших пробных точек предыдущих шагов. Кроме того, области, в которых выбираются случайные

точки последующих итераций, постепенно стягиваются к малым окрестностям «хороших» точек предыдущих итераций.

Реализация данного алгоритма на рассматриваемой тестовой задаче из экономики СССР привела к тем же числовым результатам, что и два вышеописанных локальных метода.

Результаты численного моделирования. В табл.2 указаны реальные значения $(s_i)_{i=0}^{n-1}$ в 1961-1985 гг и значения тех же величин, полученных методом градиентного спуска.

Таблица 2

Зависимость основного капитала от инвестиционной политики

Годы	s_i, i=0,n-1, по стат. данным	Основные фонды, в млрд. руб., по стат.данным	s_i, i=0,…,n-1, полученные методом градиентного спуска	Основные фонды, в млрд. руб., полученные методом градиентного спуска
1961	0,015	442	0,0373	475
1962	0,015	477	0,0348	513
1963	0,015	515	0,0337	555
1964	0,015	557	0,0329	602
1965	0,015	601	0,0323	652
1966	0,015	649	0,0315	706
1967	0,015	700	0,0309	764
1968	0,015	757	0,0303	827
1969	0,015	814	0,0297	894
1970	0,015	860	0,0290	966
1971	0,015	914	0,0254	1043
1972	0,015	972	0,0280	1124
1973	0,015	1082	0,0275	1210
1974	0,015	1150	0,0270	1301
1975	0,015	1256	0,0266	1396
1976	0,015	1345	0,0262	1496
1977	0,015	1437	0,0257	1600
1978	0,015	1537	0,0254	1709
1979	0,015	1638	0,0250	1822
1980	0,015	1742	0,0246	1939
1981	0,015	1851	0,0243	2060
1982	0,015	1968	0,0240	2184
1983	0,015	2092	0,0237	2312
1984	0,015	2234	0,0232	2443
1985	0,015	2333	0,0213	2576

Из табл.2 видно, что решение поставленной оптимизационной задачи позволяет получить значительное увеличение целевой функции. Реализация данного алгоритма на рассматриваемой тестовой задаче из экономики СССР привела к получению параметров управления $(s_i)_{i=0}^{n-1}$, при которых имеем K_{25}=2576 млрд. руб. (этот результат получен во всех трех методах). Таким образом, управляя инвестиционным процессом и выделяя на научные исследования и разработки указанные доли валового продукта,

можно было бы получить значение на 10,4% превышающее реальное значение капитала в 1985 году, которое реально составило 2333 млрд. руб.

Выводы. Предложенная математическая модель основана на предположении о том, что более эффективные технологии приводят к увеличению такого макроэкономического параметра, как коэффициент эластичности по фактору капитал. При этом можно подобрать такую последовательность управлений, которая максимизирует накопление капитала. Предложенный алгоритм может быть использован для решения задач оптимизации в системах, описывающихся с помощью дифференциальных уравнений, определяющих поведение системы во времени. При этом от решения дифференциального уравнения на предыдущем временном интервале зависят начальные условия для задачи Коши на последующем интервале. Если это решение зависит от некоторых параметров управления, то предложенный алгоритм позволяет найти такую последовательность этих параметров, при которой достигает максимума некоторый критерий, выбранный в качестве оценки эффективности данной системы.

Автор выражает благодарность профессору М.А. Сумбатяну за постановку задачи.

Библиографический список

1. Solow R. A Contribution to the Theory of Economic Growth. Quart. J. Econ, 1956. – V. 70.
2. Браун М. Теория и измерение технического прогресса /М.Браун. – М.: Статистика, 1971.
3. Arrow K. J. The economic Implication of learning by Doing. – Rev. Econ. Stud, 1962. – V. 29.
4. Sheshinski E. Optimal accumulation with learning by doing. – Essays on the theory of optimal growth. Ed. K Shell. Cambridge. Mass.: MIT Press, 1967.
5. Lucas R. E. On one mechanics of economic development. J. Monetary Econ, 1988. – №7. – V. 22.
6. Romer P. M. Endogenous technical change. – J. Polit. Econ, 1990. – № 5. – V. 98.
7. Romer P. M. Capital accumulation in the theory of long-run growth. – Modern Macroeconomics. Ed. R. Barro. Cambridge. Mass.: Harvard Univ. Press, 1989.
8. Aghiton P., Howitt P. A model of growth through creative destruction. NBER Working Paper. N 3223. Cambridge. Mass., 1990.
9. Uzawa H. Optimal technical change in an aggregative model of economic growth. Int. Econ. Rev. 1965. – № 6. – V. 6.
10. Becker G. S., Murphy K. M., Tamura R. Human capital, fertility, and economics growth. – J. Polit. Econ, 1990. № 5. – V. 98.

11. Шараев Ю.В. Теория экономического роста /Ю.В.Шараев. – М.: Издательский дом ГУ ВШЭ, 2006.
12. Сумбатян М.А. Математическая модель эндогенного экономического роста /М.А.Сумбатян, Н.А.Сайфутдинова // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Сер. Естественные науки. Прил. – Ростов н/Д. – 2005. – № 11. –С.37-48.
13. Жиглявский А.А. Математическая теория глобального случайного поиска /А.А.Жиглявский. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.

Материал поступил в редакцию 7.10.08.

M.A. SUMBATYAN, N.A. SAYFUTDINOVA

OPTIMAL CONTROL IN A MODEL OF ENDOGENOUS GROWTH FOR CLOSED ECONOMIC SYSTEMS

In the work we study a mathematical model about control of investments distribution, when the technological change is taken into consideration as an increasing elasticity coefficient on the capital factor. There is proposed a solution algorithm to solve respective optimization control problem, where the investment funds are taken from the amount which was earlier intended for investments to the manufacture process. As a result, one can achieve at a final moment of time an additional volume of production, when compared with the one given by real statistical data, as well as to reach a maximum capital accumulation.

САЙФУТДИНОВА Наталья Анатольевна, ассистент кафедры высшей математики РГСУ (1998). Окончила магистратуру механико-математического факультета РГУ (1997).
Область научных интересов: математические модели в экономике, методы оптимизации и управления, численные методы прикладного анализа.
Имеет 7 опубликованных научных работ.